# Una introducción a los Grupos de Coxeter

Jassiel Eduardo Coronado Piña

Diciembre del 2023

## 1. Introducción

Estas notas fueron escritas durante el periodo de Agosto - Noviembre 2023 con supervisión de Oscar Armando Hernández Morales. Para este proyecto se realizó el estudio y análisis del tema de ***Grupos de Coxeter***, específicamente el análisis de los grupos de Coxeter formados por los *Sistemas de Coxeter de 3 variables*, además de analizar las relaciones que llegan a tener estos grupos y sus sistemas.

## 2. Conceptos Importantes

**Definición 1.** Sea **S** un conjunto. Una matriz

$$m : S \times S \to \{1, 2, ...\infty\}$$

se le conoce como **matriz de Coxeter** si satisface las siguientes propiedades:

$$m\left(s, s'\right) = m\left(s', s\right) \tag{2.1}$$

$$m\left(s, s'\right) = 1 \iff s = s'. \tag{2.2}$$

Es decir, una **matriz de Coxeter** tiene la siguiente forma:

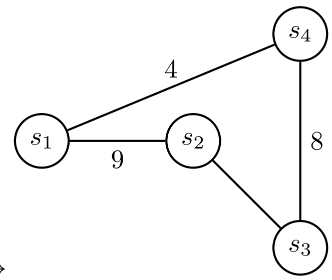
$$\begin{pmatrix} 1 & n & m & ... \\ n & 1 & l & ... \\ m & l & 1 & ... \end{pmatrix}$$

donde $l, n, m \cdots \in \mathbb{Z}^{+} - \{1\}$. [1]

**Definición 2.** La matriz $m$ puede ser representada por un **grafo de Coxeter** (o diagrama de Coxeter), cuyo conjunto de nodos está formado por $S$ y sus aristas son los pares desordenados s,s' tal que $m(s, s') \geq 3$. Si $m(s, s') \geq 4$, la arista asociada tendrá como etiqueta el valor de m(s,s') (Si $m(s, s') = 2$, no

existirá una arista que conecte a los nodos s y s'). [1]
**Ejemplo**: Con la siguiente matriz de Coxeter finita

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 & 4 \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$




Sea $S^2_{fin} = \left\{(s, s') \in S^2 : m(s, s') \neq \infty\right\}$. Una matriz de Coxeter $m$ determina un grupo $W$ con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} &Generador : S \\ &Relaciones : (s\ s')^{m(s,s')} = e \quad para\ todo\ (s, s') \in S^2_{fin} \end{aligned} \tag{2.3}$$

("$e$" *representa el elemento identidad de un grupo*).

En el caso de que s = s', es decir, m(s,s') = 1, tendremos que

$$s^2 = e \quad para\ todo\ s \in S. \tag{2.4}$$

Entonces, si $s \neq s'$, tendremos que $(ss')^{m(s,s')}$ será igual a

$$\begin{array}{c} \underbrace{s\ s'\ s\ s' \ldots s\ s'}_{\substack{\uparrow \\ m(s,s')}} = \underbrace{s'\ s\ s'\ s\ s'\ s}_{\substack{\uparrow \\ m(s',s).}} \end{array} \tag{2.5}$$

**Definición 3.** El grupo $W$ que tenga las mismas propiedades de (2,3) es conocida como **Grupo de Coxeter**. El par (W,S) se le llama **Sistema de Coxeter**. La cardinalidad de S es nombrada el **grado** de (W,S). [1]

# 3. Sistemas de Coxeter formados por 3 elementos

## 3.1. Matrices de Coxeter de $3 \times 3$

De acuerdo con la **Definición 1**, se llegan a formar las siguientes matrices de Coxeter de $3 \times 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & 2 \\ b & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & c \\ 2 & c & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & d & e \\ d & 1 & 2 \\ e & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & f & 2 \\ f & 1 & g \\ 2 & g & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & h \\ 2 & 1 & i \\ h & i & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & j & k \\ j & 1 & m \\ k & m & 1 \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, m \geq 3$.

## 3.2. Grafos de Coxeter

Siguiendo ahora con la **Definición 2**, un *Grafo de Coxeter* es formado en base a lo siguiente:

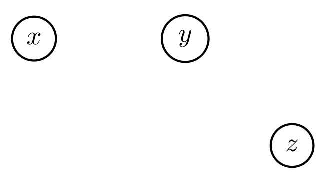
1. Los vértices del grafo son formados en base a los elementos del conjunto S.

2. Las aristas que conectan a cada vértice depende del valor de m(s,s'), visto en la definición 2.

Entonces, para los casos a analizar, se definirá al conjunto S como

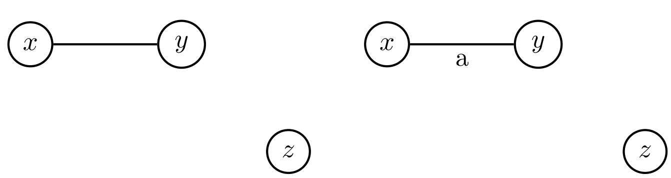
$$S = \{x, y, z\} .$$

Y, en base a las matrices realizadas en la sección 3.1, se tendrán los siguientes grafos:
Para la matriz A, solamente se podrá formar un sólo grafo:



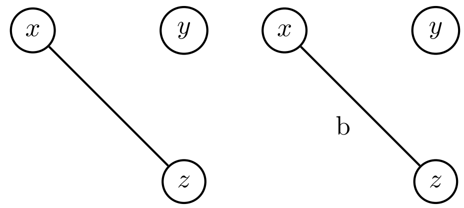

(W$_1$)

Para la matriz B, se tendrá dos grafos, los cuales dependerán del valor de $m(x, y) = a$.



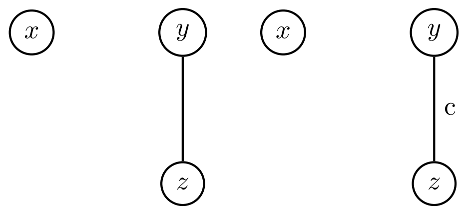

(W$_2$)

En base a la matriz C, se construirán los dos grafos siguientes, donde depende el valor de $m\,(x,z) = b$.



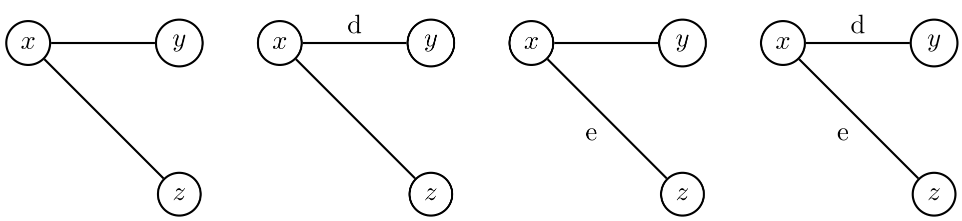

(W$_3$)

Para la matriz D, se formarán dos grafos distintos, donde depende el valor de $m\,(y,z) = c$.



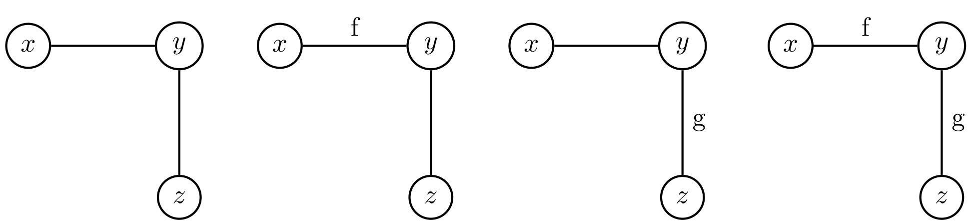

(W$_4$)

Para la matriz E, 4 grafos pueden formarse, donde dependen los valores de $m\,(x,y) = d$ y de $m\,(x,z) = e$.




(W$_5$)

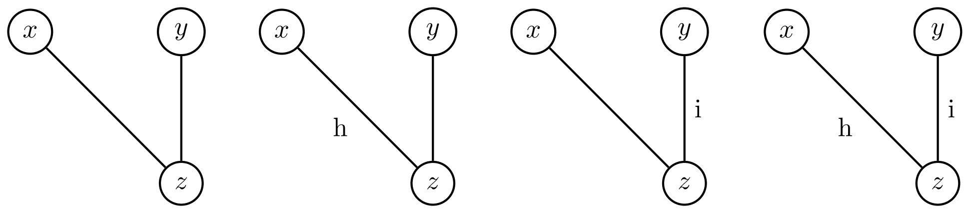
Para la matriz F, se pueden formar 4 grafos, donde dependen los valores de $m\,(x,y) = f$ y de $m\,(y,z) = g$.




(W$_6$)

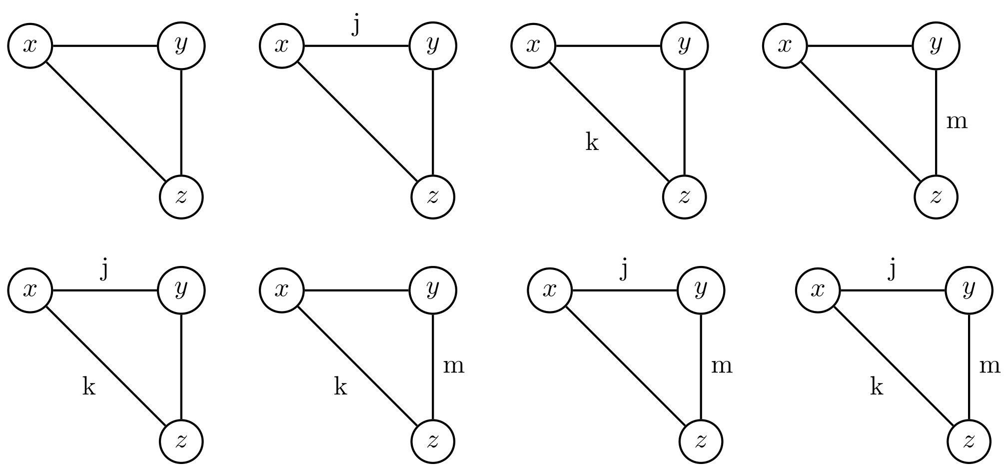
Para la matriz G, se pueden formar 4 grafos, donde dependen los valores de

$m\,(x,z) = h$ y de $m\,(y,z) = i$.




(W$_7$)

En base a la matriz H, 8 grafos se pueden formar, donde dependen los valores de $m\,(x,y) = j$, de $m\,(x,z) = k$ y de $m\,(y,z) = m$.




(W$_8$)

Se puede observar que existe un número de similitudes en algunos de los grafos anteriores, ya sea en la cantidad de aristas, vertices y/o en cómo están construídos. Entonces, se pueden analizar si los grafos son isomorfos o no. Para el análisis de isomorfismos de grafos, solamente se tomarán en cuenta a los grafos formados sin ninguna etiqueta, puesto que el análisis de los demás grafos es recíproco al análisis siguiente.

[2] Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ $y$ $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos simples, donde $V_1$ $y$ $V_2$ representen los vertices de $G_1$ $y$ $G_2$, respectivamente; y $E_1$ $y$ $E_2$ representen las aristas de $G_1$ $y$ $G_2$, de manera respectiva. $G_1$ es **isomorfo** a $G_2$ si existe
$f : V_1 \longrightarrow V_2$ función biyectiva tal que

$$e = \{v_1, v_2\} \in E_1 \longleftrightarrow \{f\,(v_1)\,, f\,(v_2)\} \in E_2$$

$$o$$

Sean $A_{G_1}$ y $A_{G_2}$ matrices de adyacencia de los grafos respectivos, donde las posiciones de la matriz $A_{G_2}$ dependen de la función $f$; si $A_{G_1}$=$A_{G_2}$ entonces $G_1$

es **isomorfo** a $G_2$.
Para considerar si pueden ser isomorfos o no, necesitan cumplir las siguientes condiciones:

- Los dos grafos deben de tener la misma cantidad de aristas ($|E_1| = |E_2|$).
- Los dos grafos deben de tener la misma cantidad de vértices ($|V_1| = |V_2|$).

  Si cumple el punto anterior:

- Los dos grafos deben de tener la misma cantidad de vértices de grado "n". Si $v \in V_1 \longrightarrow \delta(v) = \delta(f(v))$.

Con estas condiciones, el grafo $(W_1)$ y el grafo $(W_8)$ no llegan a ser isomorfos con los demás grafos puesto a que no cumplen la primera condición ($|E_1| = 0; |E_8| = 3$)

En el caso contrario, los grafos $(W_2)$, $(W_3)$ y $(W_4)$ cumplen las 3 condiciones antes mencionadas:

- $|E_2| = |E_3| = |E_4| = 1$
- $|V_1| = |V_2| = |V_3| = 3$
- Los 3 grafos contienen dos vértices de grado 1 y 1 vértice de grado 0.

Entonces sean

$$\begin{aligned} f &: W_2 \longrightarrow W_3 \\ g &: W_3 \longrightarrow W_4 \\ h &: W_4 \longrightarrow W_2 \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{array}{lll} f(x_2) = x_3 & f(y_2) = z_3 & f(z_2) = y_3 \\ g(x_3) = y_4 & g(y_3) = x_4 & g(z_3) = z_4 \\ h(x_4) = z_2 & h(y_4) = y_2 & h(z_4) = x_2 \end{array}$$

Para la función $f$ se forman las siguientes matrices de adyacencia

$$A_{W_2} = \begin{array}{c|ccc} & x_2 & y_2 & z_2 \\ \hline x_2 & 0 & 1 & 0 \\ y_2 & 1 & 0 & 0 \\ z_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \quad A_{W_3} = \begin{array}{c|ccc} & x_3 & z_3 & y_3 \\ \hline x_3 & 0 & 1 & 0 \\ z_3 & 1 & 0 & 0 \\ y_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Como $A_{W_2} = A_{W_3}$ entonces $W_2$ es **isomorfo** a $W_3$.

Para la función $g$ se forman las siguientes matrices de adyacencia

$$A_{W_3} = \begin{array}{c|ccc} & x_3 & y_3 & z_3 \\ \hline x_3 & 0 & 0 & 1 \\ y_3 & 0 & 0 & 0 \\ z_3 & 1 & 0 & 0 \end{array}, \quad A_{W_4} = \begin{array}{c|ccc} & y_4 & x_4 & z_4 \\ \hline y_4 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 \\ z_4 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Como $A_{W_3} = A_{W_4}$ entonces $W_3$ es **isomorfo** a $W_4$.

Para la función $h$ se forman las siguientes matrices de adyacencia

$$A_{W_4} = \begin{array}{c} \\ x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_4 & y_4 & z_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_{W_2} = \begin{array}{c} \\ z_2 \\ y_2 \\ x_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_2 & y_2 & x_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Como $A_{W_4} = A_{W_2}$ entonces $W_4$ es **isomorfo** a $W_2$.
Por tanto, los grafos $W_2$, $W_3$ y $W_4$ son **isomorfos**.

Además, los grafos $(W_5)$, $(W_6)$ y $(W_7)$ cumplen las 3 condiciones necesarias:

- $|E_5| = |E_6| = |E_7| = 2$
- $|V_5| = |V_6| = |V_7| = 3$
- Los 3 grafos contienen dos vértices de grado 1 y 1 vértics de grado 2.

Pero, no son isomorfos con los grafos $(W_2)$, $(W_3)$ y $(W_4)$ pues el grupo de grafos mencionados contiene 1 arista por grafos y los grafos $(W_5)$, $(W_6)$ y $(W_7)$ contienen dos aristas cada grafo (*Y por tanto, no cumplen la* $1^{ra}$ *condición*)

Entonces sean

$$F : W_5 \longrightarrow W_6$$
$$G : W_6 \longrightarrow W_7$$
$$H : W_7 \longrightarrow W_5$$

tal que

$$F(x_5) = y_6 \quad F(y_5) = x_6 \quad F(z_5) = z_6$$
$$G(x_6) = x_7 \quad G(y_6) = z_7 \quad G(z_6) = y_7$$
$$H(x_7) = z_5 \quad H(y_7) = y_5 \quad H(z_7) = x_5$$

Para la función $F$ se forman las siguientes matrices de adyacencia

$$A_{W_5} = \begin{array}{c} \\ x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_5 & y_5 & z_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_{W_6} = \begin{array}{c} \\ y_6 \\ x_6 \\ z_6 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_6 & x_6 & z_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Como $A_{W_5} = A_{W_6}$ entonces $W_5$ es **isomorfo** a $W_6$.

Para la función $G$ se forman las siguientes matrices de adyacencia

$$A_{W_6} = \begin{array}{c} \\ x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_6 & y_6 & z_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_{W_7} = \begin{array}{c} \\ x_7 \\ z_7 \\ y_7 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_7 & z_7 & y_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Como $A_{W_6} = A_{W_7}$ entonces $W_6$ es **isomorfo** a $W_7$.

Para la función $H$ se forman las siguientes matrices de adyacencia

$$A_{W_7} = \begin{array}{c} \\ x_7 \\ y_7 \\ z_7 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_7 & y_7 & z_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A_{W_5} = \begin{array}{c} \\ z_5 \\ y_5 \\ x_5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_5 & y_5 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Como $A_{W_7} = A_{W_5}$ entonces $G_7$ es **isomorfo** a $W_5$.
Por tanto, los grafos $W_5$, $W_6$ y $W_7$ son **isomorfos**.

## 3.3. Grupos de Coxeter

Para terminar este texto, se analizarán las semejanzas que llegan a tener los grupos de Coxeter ($Es\ decir,\ se\ verificará\ si\ los\ grupos\ son\ isomorfos$).
[3] Como recordatorio, se dice que dos grupos $(G, *)$ y $(H, *)$ son **isomorfos** si existe una función biyectiva $\phi : G \longrightarrow H$ que preserve la operación de grupo, es decir:

$$\phi(a, b) = \phi(a) * \phi(b)$$

$\forall a, b \in G$. Si $G$ es *isomorfo* a $H$, se denotan como $G \cong H$. Además, la función $\phi$ se le conoce como **isomorfismo**.

Para esta sección, se hará uso de cuatros grupos específicos de Coxeter, para analizar las características y las relaciones que lleguen a tener entre sí.

• $Grupo\ formado\ por\ la\ matriz$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Generador: S = $(x, y, z)$
Relaciones:

1. $x^2 = y^2 = z^2 = e$
2. $(xy)^2 = (yz)^2 = (xz)^3 = e$
3. $xy = yx$
4. $yz = zy$
5. $xzx = zxz$

$W_1 = \{e, x, y, z, xy, xz, zx, yz, xzx, xyz, yzx, yxzx\}$

$(W_1, *) =$

| * | **x** | **y** | **z** | **xy** | **xz** | **zx** | **yz** | **xyx** | **xyz** | **yzx** | **yxzx** | **e** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **x** | e | xy | xz | y | z | xzx | xyz | zx | yz | xyzx | zyx | x |
| **y** | yx | e | yz | x | yxz | yzx | z | yxzx | xz | zx | xzx | y |
| **z** | zx | zy | e | zxy | zxz | x | y | xz | zxzy | xy | yxz | z |
| **xy** | y | x | xyz | e | xz | xyzx | xz | yzx | z | xzx | zx | xy |
| **xz** | xzx | xzy | x | xzxy | zx | e | xy | z | zxy | y | yz | xz |
| **zx** | z | zxy | zxz | zy | e | xz | zxzy | x | y | xzy | xy | zx |
| **yz** | zyx | z | y | yx | zyxz | yx | e | yxz | zxz | x | xz | yz |
| **xzx** | xz | xzxy | zx | xzy | x | z | zxy | e | xy | zy | y | xzx |
| **xyz** | yxzx | xz | xy | xzx | yzx | y | x | yz | zx | e | z | xyz |
| **yzx** | yz | zx | yzxz | z | y | yxz | zxz | yx | e | xz | x | yzx |
| **yxzx** | yxz | xzx | yzx | xz | yx | yz | zx | y | x | z | e | yxzx |
| **e** | x | y | z | xy | xz | zx | yz | xzx | xyz | yzx | yxzx | e |

Por las relaciones, tenemos que

- xyz=xzy=yxz
- yzx=zyx=zxy
- xzyx=xyzx=yxzx=yzxz=zyxz=zxyz=zxzy=xzxy

- *Grupo formado por la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Generador: S= $(x, y, z)$
Relaciones:

1. $x^2 = y^2 = z^2 = e$
2. $(xy)^2 = (xz)^2 = (yz)^3 = e$
3. $xy = yx$
4. $xz = zx$
5. $yzy = zyz$

$W_2 = \{e, x, y, z, xy, xz, yz, zy, zyz, xyz, xzy, zyzx\}$

$(W_2, *) =$

| * | **x** | **y** | **z** | **xy** | **xz** | **yz** | **zy** | **zyz** | **xyz** | **xzy** | **zyzx** | **e** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **x** | e | xy | xz | y | z | xyz | xzy | xyzy | yz | zy | zyz | x |
| **y** | yx | e | yz | x | yxz | z | yzy | zy | xz | yzyx | zyx | y |
| **z** | zx | zy | e | zyx | x | zyz | y | yz | zyzx | yx | yxz | z |
| **xy** | y | x | xyz | e | yz | xz | yzyx | yzx | xzy | z | zyz | xy |
| **xz** | z | xzy | x | zy | e | xzyz | xy | xyz | zyz | y | yz | xz |
| **yz** | yzx | yzy | y | yzyx | yx | zy | e | z | zyx | x | zx | yz |
| **zy** | zyx | z | zyz | yx | yzyx | e | yz | y | x | yzx | yx | zy |
| **yzy** | yzyx | yz | zy | zyx | yzx | y | z | e | yx | zx | x | yzy |
| **xyz** | yz | xyzy | yx | yzy | y | xzy | x | xz | zy | e | z | xyz |
| **xzy** | zy | xz | xzyz | z | zyz | x | xyz | xy | e | z | y | xzy |
| **zyzx** | yzy | yxz | xzy | yz | zy | yx | xz | x | y | z | e | zyzx |
| **e** | x | y | z | xy | xz | yz | zy | yzy | xyz | xzy | zyzx | e |

Por las relaciones, se tiene que:

- xyz=yxz=yzx
- zyx=zxy=xzy
- zyzx=yzyx=yzxy=yxzy=xyzy=xzyz=zxyz=zyxz

Observamos que $W_1$ y $W_2$ son de orden 12 ($|W_1| = |W_2| = 12$). Además, $W_1 \cong W_2$.
Un isomorfismo $\phi : W_1 \longrightarrow W_2$ está dado por:

$\phi$ :
$\phi(e) = e$
$\phi(x_1) = y_2$
$\phi(y_1) = x_2$
$\phi(z_1) = z_2$
$\phi(x_1 y_1) = y_2 x_2$
$\phi(x_1 z_1) = y_2 z_2$
$\phi(z_1 x_1) = z_2 y_2$
$\phi(y_1 z_1) = x_2 z_2$
$\phi(x_1 z_1 x_1) = y_2 z_2 x_2$
$\phi(x_1 y_1 z_1) = y_2 x_2 z_2$
$\phi(y_1 z_1 x_1) = x_2 z_2 y_2$
$\phi(y_1 x_1 z_1 x_1) = x_2 y_2 z_2 y_2$

- *Grupo formado por la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Generador: S= $(a, b, c)$
Relaciones:

1. $a^2 = b^2 = c^2 = e$
2. $(ab)^3 = (ac)^3 = (bc)^2 = e$
3. $aba = bab$

4. $aca = cac$

5. $bc = cb$

$$W_3 = \{e, a, b, c, ab, ba, ac, ca, cb, aba, aca, abc,$$
$$cba, cab, bac, abac, acab, caba, baca, acba, bacba, abcab, bacab, bacbab\}$$

$(W_3, *) =$

| * | **a** | **b** | **c** | **ab** | **ba** | **ac** | **ca** | **cb** | **aba** | **aca** | **abc** | **cba** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **a** | e | ab | ac | b | aba | c | aca | acb | ba | ca | bc | acba |
| **b** | ba | e | bc | bab | a | bac | bca | c | bbab | baca | babc | ca |
| **c** | ca | cb | e | cab | cba | cac | a | b | caba | ac | cacb | ba |
| **ab** | aba | a | abc | ba | e | abac | abca | ac | b | abaca | bac | aca |
| **ba** | b | bab | bac | e | ab | bc | baca | bacb | a | bca | c | babca |
| **ac** | aca | acb | a | acab | abca | ca | e | ab | acaba | c | cab | aba |
| **ca** | c | cab | cac | cb | caba | e | ac | cacb | cba | a | cbc | cacba |
| **cb** | cba | c | b | cbab | ca | bcac | ba | e | cab | bac | cbabc | bca |
| **aba** | ab | ba | abac | a | b | abc | abaca | bac | e | acba | ac | baca |
| **aca** | ac | acab | ca | acb | acaba | a | c | cab | acba | e | ab | caba |
| **abc** | abca | ac | ab | acbab | aca | abcac | aba | a | acab | abac | abacab | e |
| **cba** | cb | cbab | cbac | c | cab | b | bac | bcacb | ca | ba | e | cbabca |
| **cab** | caba | ca | cabc | cba | c | cabac | cabca | cac | cb | cabaca | cbac | ac |
| **bac** | baca | bacb | ba | bacab | bacba | bca | b | bab | bacaba | bc | bcab | ab |
| **abac** | abaca | bac | aba | bacbab | baca | abca | ab | ba | bcacb | abc | acbab | b |
| **acab** | acaba | aca | cab | acba | ac | cabcac | caba | ca | acb | cabac | acbac | c |
| **caba** | cab | cba | cabac | ca | cb | cabc | cabaca | baca | c | cacba | cac | bac |
| **baca** | bac | bacab | cba | bacb | baca | ba | cb | caba | abaca | b | bab | cab |
| **acba** | acb | acbab | abcac | ac | acab | ab | abac | acabac | aca | aba | a | bcacb |
| **bacba** | bacb | bacbab | abca | bac | bacab | bab | abc | abcab | baca | ab | ba | cabc |
| **abcab** | acab | abca | abacab | aca | abc | cab | bacab | abcac | ac | caba | ca | abac |
| **bacab** | cabaca | baca | bcab | bacba | bac | abcab | cab | bca | bacb | cabc | abca | bc |
| **bacbab** | bacab | acbab | bacba | baca | bacb | bcab | acab | abca | bac | cab | bca | abc |
| **e** | a | b | c | ab | ba | ac | ca | cb | aba | aca | abc | cba |

| * | **cab** | **bac** | **abac** | **acab** | **caba** | **baca** | **acba** | **bacba** | **abcab** | **bacab** | **bacbab** | **e** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **a** | acab | abac | bac | cab | acaba | abaca | cba | baca | bcab | babcab | bacab | a |
| **b** | bcab | ac | abc | bacab | cab | aca | babca | acba | babcab | acab | acbab | b |
| **c** | ab | cbac | cabac | acb | aba | bac | acaba | bacbab | acba | bacb | bacba | c |
| **ab** | abcab | c | bc | cabaca | acab | ca | baca | cba | bacab | cab | cbab | ab |
| **ba** | bacab | abc | ac | bcab | cabaca | abca | ca | aca | cab | abcab | acab | ba |
| **ac** | b | abcac | bacaba | cb | ba | abac | caba | bacab | cba | bac | baca | ac |
| **ca** | acb | cabac | cbac | ab | acba | cabaca | ba | bac | bab | bacba | bacb | ca |
| **cb** | bab | cac | cabc | bacb | ab | ac | abacab | cacba | bacba | acb | acba | cb |
| **aba** | abacab | bc | c | acbab | acabac | bca | aca | ca | acab | bcab | cab | aba |
| **aca** | cb | acabac | abcac | b | cba | cabac | aba | abac | ba | cbac | bac | aca |
| **abc** | ba | ca | cab | bac | b | c | bacab | caba | baca | cb | cba | abc |
| **cba** | bacb | cabc | cac | bab | babca | cabca | a | ac | ab | acba | b | cba |
| **cab** | acba | e | b | acbac | acb | a | bac | ba | bacb | ab | bab | cab |
| **bac** | e | abca | acbab | c | a | abc | cab | acab | ca | ac | aca | bac |
| **abac** | a | bca | caba | ac | e | bc | acab | cab | aca | c | ca | abac |
| **acab** | cba | a | ab | cbac | cb | e | abac | aba | bac | b | ba | abac |
| **caba** | bacba | b | e | acba | bacb | ba | ac | a | acb | bab | ab | caba |
| **baca** | c | acaba | abca | e | ca | cabc | ac | abc | a | aca | ac | baca |
| **acba** | bacab | cab | ca | ba | baca | caba | e | c | b | cba | cb | acba |
| **bacba** | ac | bcab | bca | a | aca | cab | b | bc | e | ca | c | bacba |
| **abcab** | baca | ab | a | cba | bac | aba | c | e | cb | ba | b | abcab |
| **bacab** | ca | ba | bab | cac | bac | b | abc | ab | ac | e | a | bacab |
| **bacbab** | aca | bab | ba | ca | bac | ab | bc | b | c | a | e | bacbab |
| **e** | cab | bac | abac | acab | caba | baca | acba | bacba | abcab | bacab | bacbab | e |

Por las relaciones, se obtiene lo siguiente:

- acb=abc
- bca=cba
- acba=abca
- abac=babc=bacb
- acab=cacb=cabc
- caba=cbab=bcab
- baca=bcac=cbac
- bacba=babca=abaca=abcac=acbac
- abcab=acbab=acaba=cacba=cabca
- bacab=bcacb=bcabc=cbacb=cbabc=cabac
- acabac=cacbac=cabcac=abacab=babcab=bacbab=bacbab= bacaba=cbacba=bcabca=bcacba=cbabca=cabaca

• *Grupo formado por la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Generador: S= $(a, b, c)$
Relaciones:

1. $a^2 = b^2 = c^2 = e$
2. $(ab)^2 = (ac)^3 = (bc)^3 = e$
3. $ab = ba$
4. $aca = cac$
5. $bcb = cbc$

$$W_4 = \{e, a, b, c, ab, ac, ca, bc, cb, aca, bcb, abc, acb, bca, cba, abcb, acab, baca, bcba, cabc, bacba, cabca, acbac, cabcab\}$$

$(W_4, *) =$

| * | a | b | c | ab | ac | ca | bc | cb | aca | bcb | abc | acb |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **a** | e | ab | ac | b | c | aca | abc | acb | ca | abcb | bc | cb |
| **b** | ba | e | bc | a | bac | bca | c | bcb | baca | cb | ac | bacb |
| **c** | ca | cb | e | cab | cac | a | cbc | b | ac | bc | cabc | cacb |
| **ab** | b | a | abc | e | bc | abca | ac | abcb | bca | acb | c | bcb |
| **ac** | aca | acb | a | acab | ca | e | acbc | ab | c | abc | acabc | cab |
| **ca** | c | cab | cac | cb | e | ac | cabc | cacb | a | cabcb | cbc | b |
| **bc** | bca | bcb | b | bcab | bcac | ba | cb | e | bac | c | bcabc | bcacb |
| **cb** | cba | c | cbc | ca | cbac | cbca | e | bc | cbaca | b | cac | cbacb |
| **aca** | ac | acab | ca | acb | a | c | acabc | cab | e | cabc | acbc | ab |
| **bcb** | bcba | bc | cb | bca | bcbac | cba | b | c | cbac | e | bcac | bcbacb |
| **abc** | baca | abcb | ab | abcba | bca | b | acb | a | bc | ac | bcabcb | cabc |
| **acb** | acba | ac | acbc | aca | acabc | abcba | a | abc | abcbac | ab | ca | bcab |
| **bca** | bc | bcab | bcac | bcb | b | bac | bcabc | bcacb | ba | bcbacb | cb | e |
| **cba** | cb | ca | cbac | c | cbc | cbaca | cac | cabcb | cbca | cacb | e | bc |
| **abcb** | abcba | abc | acb | abca | abcbac | acba | ab | ac | acbac | a | bca | bcabc |
| **acab** | acb | aca | acabc | ac | acbc | acabca | ca | cabc | acbca | cab | a | abc |
| **baca** | bac | bacab | bca | bacb | ba | bc | bcabcb | bcab | b | bcabc | acb | a |
| **bcba** | bcb | bca | bcbac | bc | cb | cbac | bcac | bcbacb | cba | bcacb | b | c |
| **cabc** | cabca | cabcb | cab | cabcba | cbca | cb | cacb | ca | cbc | cac | bcacb | cbcab |
| **bacba** | bacb | baca | bacbac | bac | bacbc | acbac | bca | bcabc | acba | bcab | ba | ac |
| **cabca** | cabc | cabcab | cbca | cabcb | cab | cbc | acbca | bca | cb | bcac | cacb | ca |
| **acbac** | bcacbc | cabc | acba | cabca | acbca | acb | cab | aca | acbc | ca | bcab | abca |
| **cabcab** | cabcb | cabca | bcacb | cacbc | cacb | acbc | cbca | bcac | acb | bca | cab | cac |
| **e** | a | b | c | ab | ac | ca | bc | cb | aca | bcb | abc | acb |

| * | bca | cba | abcb | acab | baca | bcba | cabc | bacba | cabca | acbac | cabcab | e |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **a** | abca | acba | bcb | cab | bca | abcba | acabc | bcba | acabca | cbac | cabca | a |
| **b** | ca | bcba | acb | bacab | aca | cba | bcabc | acba | cbac | bacbac | cbacb | b |
| **c** | cbca | bacb | cabcb | acb | cbaca | bca | abc | cbacba | abca | acbc | abcab | c |
| **ab** | aca | abcba | cb | bacb | ca | acba | bacabc | cba | acbac | bcbac | cabc | ab |
| **ac** | acbca | b | cabc | cb | acbaca | abca | bc | cabca | bca | cbc | bcab | ac |
| **ca** | cabca | acb | bc | ab | cbca | cabcba | acbc | bca | acbca | bac | abca | ca |
| **bc** | cba | a | bcabcb | bacb | cbac | ca | ac | cbacb | aca | acb | acab | bc |
| **cb** | a | bca | cacb | bcbacb | ac | ba | bcac | cacba | bac | bcacb | bacb | cb |
| **aca** | acabca | cb | abc | b | acbca | cabca | cbc | abca | cbca | bc | abcab | aca |
| **bcb** | ba | ca | bcacb | cbacb | bac | a | cac | cbacba | ac | cacb | acb | bcb |
| **abc** | acba | e | bcabc | bcb | acbac | aca | c | cabc | ca | cb | cab | abc |
| **acb** | e | abca | cab | cabca | c | b | bca | cb | bc | cbca | bcb | acb |
| **bca** | cbac | bacb | c | a | cba | cbacb | acb | ca | acba | ac | aca | bca |
| **cba** | ac | cacbca | b | bca | a | acb | acb | ba | acbc | bcac | bac | cba |
| **abcb** | b | aca | bcab | cabc | bc | e | ca | bcb | c | cab | cb | abcb |
| **acab** | c | cabca | ab | abca | e | cb | cbca | b | cbc | bca | bc | acab |
| **baca** | acbac | bcb | ac | e | acba | cbac | cb | aca | cba | c | ca | baca |
| **bcba** | bac | cbacb | e | ca | ba | bacb | cacb | a | acb | cac | ac | bcba |
| **cabc** | acb | c | bcac | bc | acbc | ac | e | abc | a | b | ab | cabc |
| **bacba** | bc | cbac | a | aca | b | bcb | cab | e | cb | ca | c | bacba |
| **cabca** | acbc | bc | cac | c | acb | bac | b | ac | ba | e | a | cabca |
| **acbac** | cb | ac | bca | abc | cbc | c | a | bc | e | ab | b | acbac |
| **cabcab** | cbc | bac | ca | ac | cb | bc | ba | c | b | a | e | cabcab |
| **e** | bca | cba | abcb | acab | baca | bcba | cabc | bacba | cabca | acbac | cabcab | e |

Por las relaciones, tendremos lo siguiente:

- abc=bac
- cab=cba
- cabc=cbac
- acab=cacb=acba
- abcb=acbc=bacb
- baca=bcac=abca
- bcba=cbca=bcab
- cabcb=cbacb=cacbc=acabc=acbac
- cabca=cbaca=cbcac=bcbac=bcabc
- bacba=abcab=bacab=bcacb=abcba=acbca
- cabcba=cbacab=cbcacb=bcbacb=bcabcb=bcacbc=bacabc= abcabc=bacbac=abcbac=acbcac=acbaca=acabca

Observamos que $W_3$ y $W_4$ son de orden 24 ($|W_3| = |W_4| = 24$), por tanto no llegan a ser isomorfos a $W_1$ ni $W_2$ por tener orden distinto. Se llega a que $W_3 \cong W_4$ Un isomorfismo $\phi : W_3 \longrightarrow W_4$ está dado por:

$\phi$ :
$\phi(e) = e$
$\phi(a_3) = c_4$
$\phi(b_3) = b_4$
$\phi(c_3) = a_4$
$\phi(a_3b_3) = c_4b_4$
$\phi(b_3a_3) = b_4c_4$
$\phi(a_3c_3) = c_4a_4$
$\phi(c_3a_3) = a_4c_4$
$\phi(c_3b_3) = a_4b_4$
$\phi(a_3b_3a_3) = c_4b_4c_4$
$\phi(a_3c_3a_3) = c_4a_4c_4$
$\phi(a_3b_3c_3) = c_4b_4a_4$
$\phi(c_3b_3a_3) = a_4b_4d_4$
$\phi(c_3a_3b_3) = a_4c_4b_4$
$\phi(b_3a_3c_3) = b_4c_4a_4$
$\phi(a_3b_3a_3c_3) = c_4b_4c_4a_4$
$\phi(a_3c_3a_3b_3) = c_4a_4c_4b_4$
$\phi(c_3a_3b_3a_3) = a_4c_4b_4c_4$
$\phi(b_3a_3c_3a_3) = b_4c_4a_4c_4$
$\phi(a_3c_3b_3a_3) = c_4a_4b_4c_4$
$\phi(b_3a_3c_3b_3a_3) = b_4c_4a_4b_4c_4$
$\phi(a_3b_3c_3a_3b_3) = c_4b_4a_4c_4b_4$
$\phi(b_3a_3c_3a_3b_3) = b_4c_4a_4c_4b_4$
$\phi(b_3a_3c_3b_3a_3b_3) = b_4c_4a_4b_4c_4b_4$

# 4. Conclusiones

Con lo analizado en el texto, se pueden llegar a ciertas observaciones: Se llega a observar una relación entre los grafos isomorfos de Coxeter con los grupos isomorfos de Coxeter basados de dichos grafos, además de que todo grupo realizado en la investigación es de orden par, y por otra parte se vió que el orden de los grupos de Coxeter de 3 variables siguen una sucesión -el cual es más notorio en los grupos de Coxeter de 2 variables ($|W| = 2n$) -. Una idea a futuro sobre este estudio es analizar si se puede llegar a una conclusión general de las observaciones vistas, además de investigar si existen más isomorfismos entre los grupos de Coxeter y otros grupos existentes, debido a que esto ayudaría a analizar de manera más simple los grupos de Coxeter. Aunque lo que está en el texto no nos da una demostración completa de las conclusiones, si dan un gran paso en el estudio de los sistemas de Coxeter y el comportamiento de estos.

## Referencias


[1] Anders Björner and Francesco Brenti. *Combinatorics of Coxeter groups*, volume 231. Springer, 2005.

[2] Germán Combariza. Una introducción a la teoría de grafos. 2003.

[3] Marcos Ramírez Mejía, MARCOS RAMIREZ MEJIA, et al. Introducción a la teoría de grupos y anillos. B.S. thesis, 2015.